Systèmes Dynamiques

Analyse et Stabilité

AO 102

Frédéric Jean

UMA – pièce 2.4.25

Frederic.Jean@ensta-paristech.fr

Plan de la séance

Systèmes Dynamiques

Modèles mathématique des phénomènes évoluant dans le temps :

- un espace des états, Ω $(= \mathbb{R}^n$ ou un ouvert de $\mathbb{R}^n$ par ex.)
- une loi d'évolution, ici une **équation différentielle :**

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x \in \Omega$$

$\rightarrow$ Newton, 1687 : "$\mathbf{F} = ma$"
étudier les forces plutôt que les mouvements

Plusieurs formes

$f(t,x) = f(x)$	$\longrightarrow$	ED autonome
$f(t,x) = A(t)x \ \ [+b(t)]$	$\longrightarrow$	ED linéaire [affine]
$x'(t) = f(t, x(t), u(t))$	$\longrightarrow$	ED commandée (automatique)
$x'(t) = f(t, x(t), \mathbf{B}_t)$	$\longrightarrow$	ED stochastique ($\mathbf{B}_t$="bruit")

Fait essentiel :
on ne sait presque jamais résoudre une ED

$\Longrightarrow$ Deux approches possibles :

- **analyse numérique :** court terme, solution par solution
- **étude qualitative :** court et long terme, global

En particulier, étude du *comportement asymptotique*

$\rightarrow$ Régimes stationnaires (= solutions limites) ?

$\rightarrow$ Équilibres ? Stabilité ?

$\rightarrow$ Ensembles attracteurs ?

$\rightarrow$ Solutions bornées ou explosion ? en temps fini ou infini ?

Applications

- **Mécanique :**
  Système à n paramètres, loi : $\mathbf{F} = ma$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \frac{1}{m}F(x,x',t) \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Équilibres stables ?

- **Chimie (cinétique) :**
  Réaction avec n produits, de concentrations $c_1, \dots, c_n$

$$\Longrightarrow \qquad c' = f(c), \quad c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Équilibres stables = produits obtenus

- **Dynamique des populations :**
  biologie, épidémiologie, écologie, économie, ...

Exemples

- Modélisation de la grippe (TD3)
- Modèles prédateur/proie (TD3-6)

- **Résolution d'EDP :**
  solutions particulières avec conditions aux limites

Exemples

- Vagues solitaires ou solitons (TD6)
- Équation de Schrödinger d'un milieu conducteur solide

- **Automatique :**
  commande, stabilisation, construction d'observateurs

Plan du cours

1. **Introduction + Calcul différentiel**
2. **Exercices de Calcul différentiel (3h de TD)**
3. **Théorie générale des ED :** $x'(t) = f(x(t))$
4. **Cas linéaire autonome :** $x'(t) = Ax(t)$
5. **Linéarisation & ED linéaires non autonomes :**
   $\delta x' = Df(x(t)) \cdot \delta x \quad$ **&** $\quad x'(t) = A(t)x(t)$
6. **Équilibres et stabilité,**
   $x' = f(x)$ **vs** $\delta x' = Df(x_0) \cdot \delta x$

En pratique

- Groupes de TD par concours d'origine (comme en MA102)
- Examen final = écrit (3h) sans documents

  sauf **<u>une</u>** feuille manuscrite

  Date de l'examen : mardi 8 novembre
- Devoir maison sur le calcul différentiel $\rightarrow$ 2 pts de bonus

  (donné au TD2, à rendre au TD3)
- Pour me contacter :
  - dans mon bureau (N^0 2.4.25, UMA)
  - par email `Frederic.Jean@ensta-paristech.fr`
- Transparents disponibles sur la page web du cours
- Corrigés et exos supplémentaires dans le poly

Plan de la séance

E, F esp. vect. de dimension finie — $U \subset E$ ouvert
$f : U \subset E \to F$ application

Définition

f est **différentiable** en $a \in U$ si il existe $L_a : E \to F$ linéaire t.q.

$$\forall h \in E, \quad f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

$\longrightarrow Df(a) = L_a$: **différentielle** de f en a

Exemples

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad Df(t_0) : h \mapsto hf'(t_0)$
- Si $f : E \to F$ linéaire, $\quad Df(a) = f$ pour tout $a \in E$

Propriétés

Si f différentiable en a, alors

- f **continue** en a,
- pour tout $v \in E$,

$$Df(a) \cdot v = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a))$$

Opérations

- **Somme :** $\quad D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$
- **Leibniz :** Si $f, g : E \to \mathbb{R}$ différentiable en a,

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$$

- **Composition :** Si $\begin{cases} f : E \to F \text{ différentiable en } a \\ g : F \to G \text{ différentiable en } f(a), \end{cases}$

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

Dérivées partielles

- Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x)$

  $\Longrightarrow Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = M_{1n}(\mathbb{R})$ (matrice ligne)

  Alors

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

- Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\quad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$,

  $\Longrightarrow Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = M_{pn}(\mathbb{R})$ (matrice $p \times n$),

$$\boxed{Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}}$$

Classe C^1

- $f : U \subset E \to F$, différentiable sur U, définit

$$\begin{array}{rccc} Df : & U & \longrightarrow & L(E,F) \\ & x & \longmapsto & Df(x) \end{array}$$

- Si Df est continue en a, on dit que
  f **est de classe** C^1 en a

Proposition

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Alors :

f est C^1 en a $\iff$ les $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existent et sont **continues** en a.

Méthode

Pour montrer que f est différentiable en a et calculer $Df(a)$:

1. Si c'est possible, calculer les $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ (+ continuité)
2. Utiliser des opérations $(f = g \circ h$ en général)
3. Revenir à la définition :

   écrire $\quad f(a+h) = \cdots$

Classes C^k

- Si $Df : U \longrightarrow L(E,F)$ est différentiable en a, on dit que
  f **est 2 fois différentiable** en a ; $\quad D(Df)(a) = D^2 f(a)$
- Si Df de classe C^1 en a, on dit que
  f **est de classe** C^2 en a

$$\vdots$$

- Si f de classe C^k en a pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que
  f **est de classe** C^∞ en a

Et en dimension infinie ?

Soit $f : E \to F$ où E, F esp. vect. de dimension **infinie**

Hyp : E, F espaces de Banach
(= esp. vect. normés complets, voir **MA102**)

Définition

f est **différentiable** en $a \in E$

si il existe $L_a : E \to F$ linéaire et continue t.q.

$$\forall h \in E, \quad f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

$\longrightarrow$ $Df(a) = L_a$: **différentielle** de f en a

Plan de la séance

Théorème des accroissements finis

(Hyp)
- *$f : U \subset E \to F$ différentiable sur U*
- *a, b points de U, avec $[a, b] \subset U$*

$$\Longrightarrow \qquad \|f(b) - f(a)\| \;\leq\; \Big(\sup_{x\in[a,b]} \|Df(x)\|\Big)\, \|b - a\|$$

Conséquences (U connexe)

- Si $\|Df(x)\| \leq K$ pour tout $x \in U$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \;\leq\; K\, \|b - a\|$$

- f C^1 sur un compact $\Omega \subset U \implies f$ lipschitzienne sur Ω.

Plan de la séance

Théorème des fonctions implicites

Si
- *$f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, de classe C^k,*
- *$(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$,*
- *$D_y f(a, b)$ inversible,*

Alors il existe $\left\{ \begin{array}{l} V \text{ vois. de } a, \quad W \text{ vois. de } b, \\ \varphi : V \to W \text{ de classe } C^k, \end{array} \right.$ *tels que*

$$(x \in V,\ y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

De plus, $\quad D\varphi(x) = -D_y f(x, \varphi(x))^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x)) \quad$ sur V

Théorème d'inversion locale

(Hyp)
- $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *de classe* C^k
- $Df(a)$ *inversible, pour un point* $a \in U$

$\Rightarrow$ *il existe* V *voisinage de* a, W *voisinage de* $f(a)$, *t.q.*
f *bijection de* V *dans* $W = f(V)$ *et* f^{-1} *de classe* C^k.

En d'autres termes,

$$(x \in V \text{ et } y = f(x)) \Longleftrightarrow (y \in W \text{ et } x = f^{-1}(y))$$

De plus, pour tout $y \in W$,

$$Df^{-1}(y) = \left[Df(f^{-1}(y))\right]^{-1}$$